

La singular física del botafumeiro



Juan R. Sanmartín

Departamento de Física Aplicada. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos. Universidad Politécnica de Madrid

III La tardía ciencia del péndulo

Paradójicamente, para entender la aparición del botafumeiro de la catedral de Santiago de Compostela en el siglo XIII hay que avanzar en el tiempo en varios siglos, primeramente al XVII, después al XIX... y al XX. El botafumeiro es un particular ejemplo del péndulo como paradigma en Física. La concepción de ese paradigma físico se desarrolló en el siglo XVII.

El péndulo se mueve en un plano vertical describiendo un arco de círculo de cierto radio, sube y baja. En ese

movimiento varían/oscilan velocidad, altura sobre el suelo, ángulo con la dirección vertical desde la posición inferior... Se dice en Física que un péndulo es un oscilador. La energía de su movimiento se puede caracterizar de modo universal por la amplitud de la oscilación, que es el máximo ángulo con la vertical. En un oscilador intervienen típicamente dos formas de energía, aquí cinética, función de la velocidad (proporcional a su cuadrado), y potencial gravitatoria,

que es proporcional a la altura sobre algún nivel de referencia. La energía va y viene de una forma a otra pero, idealmente, la suma E de energías cinética y potencial se mantendría constante.

Una oscilación de péndulo completa (repitiendo posición y dirección del movimiento) exige pasar dos veces por la vertical; se llama período del péndulo a la duración de una completa oscilación. Se dice que Galileo Galilei, observando en la Ca-



tedral de Pisa una lámpara de bronce colgante, en débil balanceo con ocasión de ser encendida, midió su período. Contando sus propias pulsaciones, Galilei habría observado que el período no variaba al reducirse el balanceo y estableció así una ley de isocronismo: para un péndulo dado, el período sería independiente de la amplitud, lo que facilitaría la medida de tiempos; sería también independiente del peso del péndulo.

Galilei también estableció que el cuadrado del período es proporcional a la longitud del radio de giro o radio pendular, e inversamente proporcional a la aceleración que él mismo había considerado en su estudio genérico del movimiento de un grave sobre un plano inclinado, la que llegaría a ser aceleración de la gravedad, g^1 .

¹ Galilei, G., *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenanti alla meccanica ed i movimenti locali*, Leyden, 1638.

Se habla de péndulo simple cuando el objeto que cuelga es pequeño en comparación a la distancia al punto de suspensión. En otro caso se habla de péndulo compuesto; ¿cuál sería su radio pendular? De Huygens es la solución general de ese problema. A él también se debe el análisis del péndulo esférico, cuyo punto de suspensión permite oscilación no plana, en particular movimiento siguiendo una superficie cónica, así como oscilación en un plano vertical de orientación arbitraria². En el siglo XIX, en el sótano de su casa familiar en París, junto al Jardín del Luxemburgo, Léon Foucault utilizó un péndulo esférico para demostrar el movimiento de rotación de la Tierra observando la lenta rotación del plano de oscilación relativa a edificio y Tierra³.

Del siglo XIX data el segundo concepto físico que subyace en la operación del botafumeiro: el bombeo paramétrico de un oscilador, introducido por Michael Faraday en 1831⁴. El columpio es ejemplo de péndulo. ¿Cómo se puede amplificar la oscila-

ción de un columpio, no ya para mantener la amplitud como en un reloj de péndulo, sino para que alcance mayor altura? En el caso de un niño pequeño sentado en el columpio se le empuja en el sentido del movimiento; se habla de oscilador forzado, típicamente por sucesión rítmica de breves impulsos. Pero existe una alternativa, que es el bombeo paramétrico de un oscilador. Ejemplo es el niño solo, de pie en el columpio, que se agacha y se yergue cíclicamente; variando su 'radio pendular' puede aumentar la amplitud de la oscilación. En general, pérdidas de energía crecientes con la amplitud pueden llevar a una oscilación límite, que es la resonancia paramétrica de Faraday. En el siglo XIX mismo, Émile Mathieu consideró la amplificación paramétrica, no ya por acciones sobre un parámetro del oscilador (el radio pendular, en el columpio) breves, sino siguiendo la función trigonométrica seno durante la oscilación⁵; George W. Hill consideró el caso general de modulación periódica del parámetro⁶.

En el siglo XX, en sus dos últimas décadas, se analizaron tanto el péndulo plano como el esférico a la luz de un paradigma, *deterministic chaos*, descubierto veinte años antes por Edward N. Lorenz⁷. Ese paradigma establece que muchos sistemas físicos sencillos, cuya evolución en cada instante está enteramente determinada por ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, pueden presentar un comportamiento 'caótico' por el que es imposible determinar la evolución del sistema para tiempos indefinidamente largos (y ello en cierto radical sentido), si el número de aquellas ecuaciones es superior a 2; llamémosles sistemas 3D (de 3 dimensiones), 4D, etc. En los estudios mencionados, en los que se consideraron péndulos forzados y bombeados paraméricamente, se encontró movimiento caótico bajo ciertas condiciones. El botafumeiro de Santiago de Compostela, como columpio esférico ocasionalmente, pudo haber originado primeras experiencias relacionadas con *deterministic chaos*...

² Huygens, C., *Horologium oscillatorium*, París, 1673.

³ Foucault, L., en "Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des Sciences", comunicación de François Arago, *Académie des Sciences*, febrero 3, 1851, pp. 135-136.

⁴ Faraday, M., "On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by a group of particles upon vibrating elastic surfaces", *Philosophical Transactions of the Royal Society*, London, Vol. 191, pp. 299-318, 1831.

⁵ Mathieu, E., "Mémoire sur Le Mouvement Vibratoire d'une Membrane de forme Elliptique", *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, Vol. XII, pp. 137-203, 1868.

⁶ Hill, G. W., "On 'The Part of the Motion of Lunar Perigee Which is a Function of the Mean Motions of the Sun and Moon'", *Acta Mathematica*, Vol. 8, pp. 1-36, 1886.

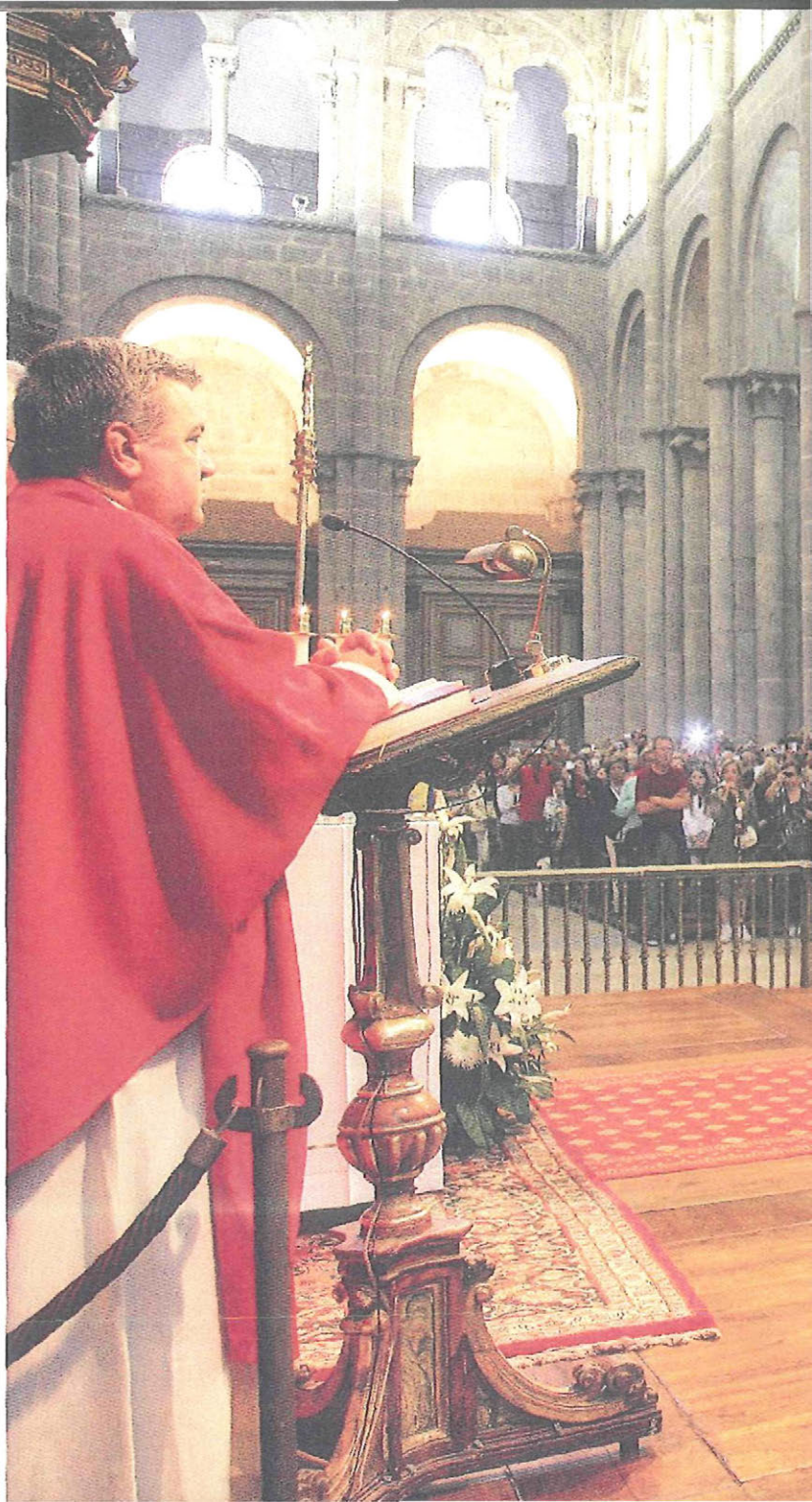
⁷ Lorenz, E. N., "Deterministic nonperiodic flow", *The Journal of Atmospheric Sciences*, Vol. 20, pp. 130-141, 1963.



Se habla de péndulo simple cuando el objeto que cuelga es pequeño en comparación a la distancia al punto de suspensión.

III La invención del rito del botafumeiro

En el columpio se aprende a bombear como a ir en bicicleta, de modo instintivo; interviene en ello la percepción del movimiento del propio cuerpo. Aparentemente, no se explicó regla alguna sobre el columpio hasta el siglo XIX, y no antes del trabajo de Faraday. Lo sorprendente del botafumeiro, que data del XIII, es que anticipa resultados de siglos posteriores. Este incensario gigante, que es un aparato mecánico desarrollado e instalado para un servicio religioso en la catedral románica de Santiago, que antecede en 6 siglos a Faraday y en unos 4 siglos a Galilei y Huygens, todavía funciona. En el crucero de la Catedral, que tiene 65 metros de largo y 20,8 metros de altura, cuelga permanentemente un ornamento de plata ("la alcachofa"), al cual, con ocasión de celebraciones, reemplaza el botafumeiro, que se pone en movimiento siguiendo una muy específica regla operativa. Todo esto suscita una cuestión sencilla, aunque no sencilla de responder. ¿Cómo se pudo descubrir en el siglo XIII, sin saber mecánica, la regla de operación del Incensario?





El sacristán mayor empuja el botafumeiro como si fuese un columpio y establece una primera amplitud de aproximadamente 13 grados.



Ciertamente las catedrales eran en la Baja Edad Media asiento de poder y, de algún modo, semillero de tecnología. En sus campanarios se empezaron a instalar en el siglo XIV relojes mecánicos de ruedas con dientes como en los futuros escapes, aunque eran fundamentalmente ineficientes porque carecían del período, regulador, de algún fenómeno oscilatorio⁸; esos relojes vinieron a reemplazar a los también ineficientes relojes de sol, agua, arena, o quemado de velas. Por otra parte, se sabe que un incensario gigante colgaba en la vieja basílica de San Pedro en Roma pero no hay registro alguno de su movimiento; una lámpara aromática gigante colgaba asimismo en el transepto de la catedral de Santiago en el siglo XII. Es claro que no se podía 'forzar' el movimiento del botafumeiro, empujarlo progresivamente como a un columpio. Tampoco era posible operarlo como se hace con un incensario manual, al que se pone a oscilar agi-

El botafumeiro es un columpio estérico ocasionalmente.

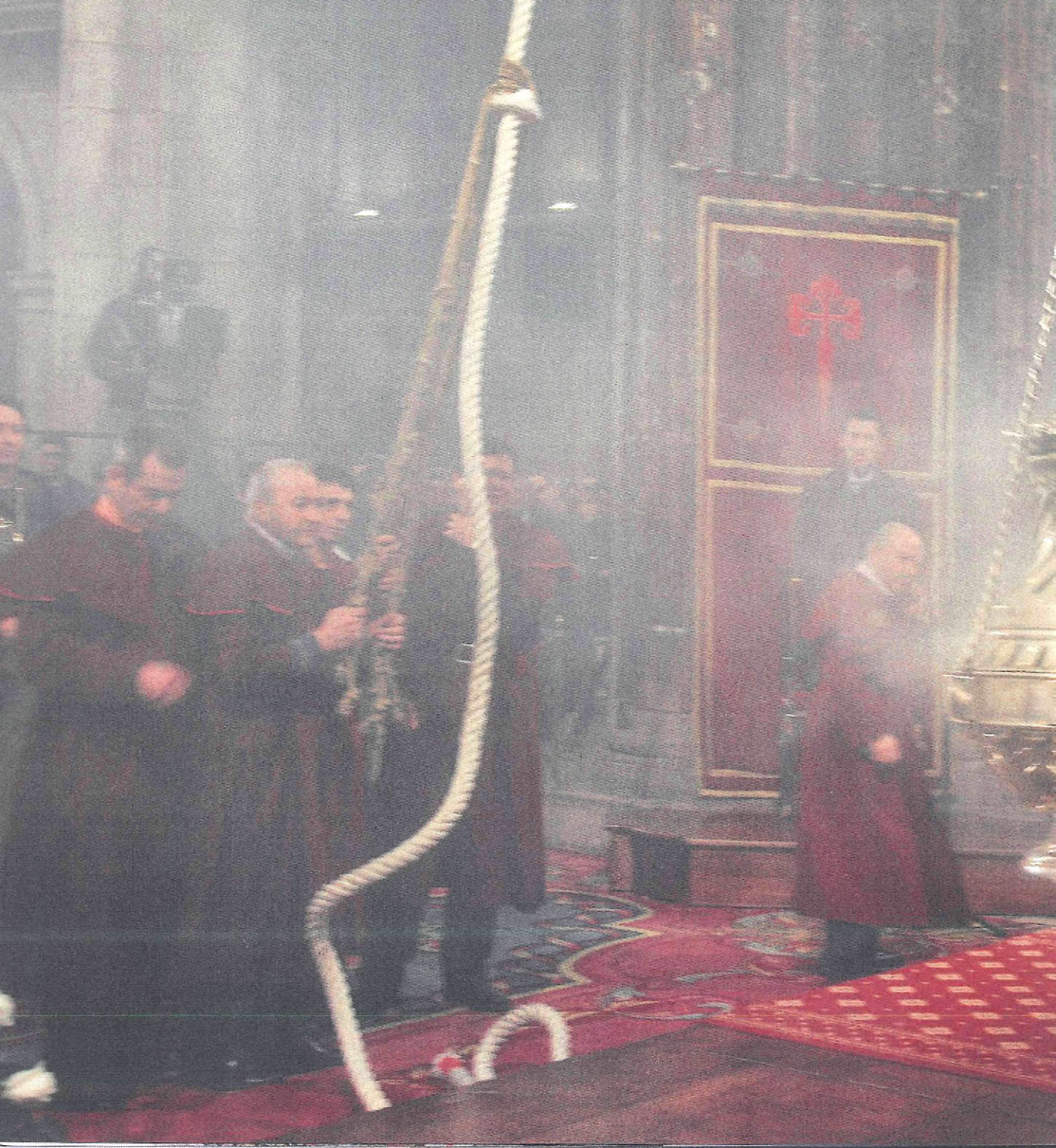
tando la mano, esto es, el punto de suspensión, lo que resulta equivalente al forzado de oscilaciones.

Sólo aparecería posible la acción indirecta de actuar sobre la cuerda de la que colgaba el botafumeiro. En algún momento del siglo XIII, alguien hizo necesariamente algunas observaciones simples pero fundamentales: para poder repetir muchas veces la acción sobre la cuerda, cíclicamente (lo que aparecería necesario para conseguir efecto apreciable), la variación neta de la longitud de cuerda debería ser nula, esto es, en cada ciclo pasar de cierta longitud, digamos L , a otra menor $L-\Delta L$, y alargarla de vuelta a L . Sin duda, esto suscitaría una dificultad esencial: sería necesario que a pesar de esa nula variación neta de longitud, se produjera algún efecto neto, en particular sobre la amplitud de la oscilación. Hubo de intuirse que acortar y alargar igualmente la cuerda en momentos dife-

rentes del ciclo podría tener efectos diferentes, y así efecto neto no nulo. Por otra parte, cualquier diferencia y su efecto neto debieran ser mayores entre condiciones diferentes extremas, las cuales muy claramente corresponderían a los pasos por la vertical y por lo alto de la oscilación. Y aparecería también claro que para máximo efecto, para una diferencia extrema entre ambos procesos, estos debieran ser breves en duración (instantáneos en la medida de lo posible), en lugar de seguir variación de algún modo acomodada a la comparativamente lenta oscilación del incensario. Quedaban sólo dos posibilidades: acortar al pasar el botafumeiro por la vertical, o al revés; cualquier operación de prueba se habría reducido a dos posibles casos.

Cual de ellos es correcto se verá; se observará asimismo que el bombeo del botafumeiro es en verdad óptimo, con acciones prácticamente ins-

tantáneas en lo más alto y más bajo de la oscilación. En cualquier caso, el enérgico bombeo del incensario supone el esfuerzo de varios operarios, por lo que es tarea de equipo, y el descubrimiento de la regla o ley de bombeo hizo necesario seguir órdenes explícitas; la operación no involucra percepción alguna del propio cuerpo, como en los casos de bicicleta y columpio. Había, hay, un *know-how* que podía transmitirse por renovación de un grupo social, un círculo de expertos, el sacristán mayor y ayudantes; el actual sacristán, Armando Raposo, se unió al equipo en 1950 y pasó a encabezarlo en 1964. Por otra parte, hay evidencia de que ese saber técnico se transmitió más allá de Santiago. En los Anales del Cabildo de la catedral de Ourense se dice que un gran incensario operaba allí en 1503; cierta tradición mantiene que otro gran incensario operó en la catedral de Tui.





Armando Raposo, fabriquero de la catedral, deteniendo el botafumeiro el 31 de diciembre de 2009 en la ceremonia de apertura de la Puerta Santa.

Los elementos del rito

El rito habría empezado en el siglo XIII. El registro más antiguo es una nota de comienzos del XIV, en el margen del folio 162, capítulo IV, en el libro III de un Códice de mitad del XII, el *Codex Sancti Jacobi*; en ese folio se describe una procesión ceremonial, sin mención del botafumeiro, procesión que todavía se realiza en la actualidad. La nota en latín en el margen, cuya escritura se ha datado como del primer cuarto del siglo XIV, describe la operación del botafumeiro, y dice que es "ahora" parte de la procesión, de nuevo como en la actualidad. La siguiente noticia sobre el incensario aparece en un inventario de la catedral de 1426. La primera descripción de un testigo es de un médico alemán, Jerónimo Munzer, que llegó a Santiago el 13 de diciembre de 1494, y aludió dos veces al botafumeiro en su crónica del viaje por España, en latín. En la operación del incensario interviene un equipo de 6 a 8 operarios, los *tiraboleiros*. El sacristán mayor lo em-

puja como a un columpio y establece así una primera amplitud de 13 grados aproximadamente. A continuación, los *tiraboleiros* tiran de la cuerda en el punto inferior y sueltan en lo más alto del movimiento, en una operación cíclica que se repite así dos veces en cada sucesivo período. El bombeo de energía a las oscilaciones resulta en la amplificación paramétrica⁹. Se requieren unos 80 segundos y 17 ciclos para alcanzar una amplitud máxima de 82 grados, a medio metro de la bóveda, trazando un arco de 65 metros, pasando a 68 kilómetros por hora a ras de suelo¹⁰. Como se verá, es la resistencia del aire la que limita la amplitud de oscilación.

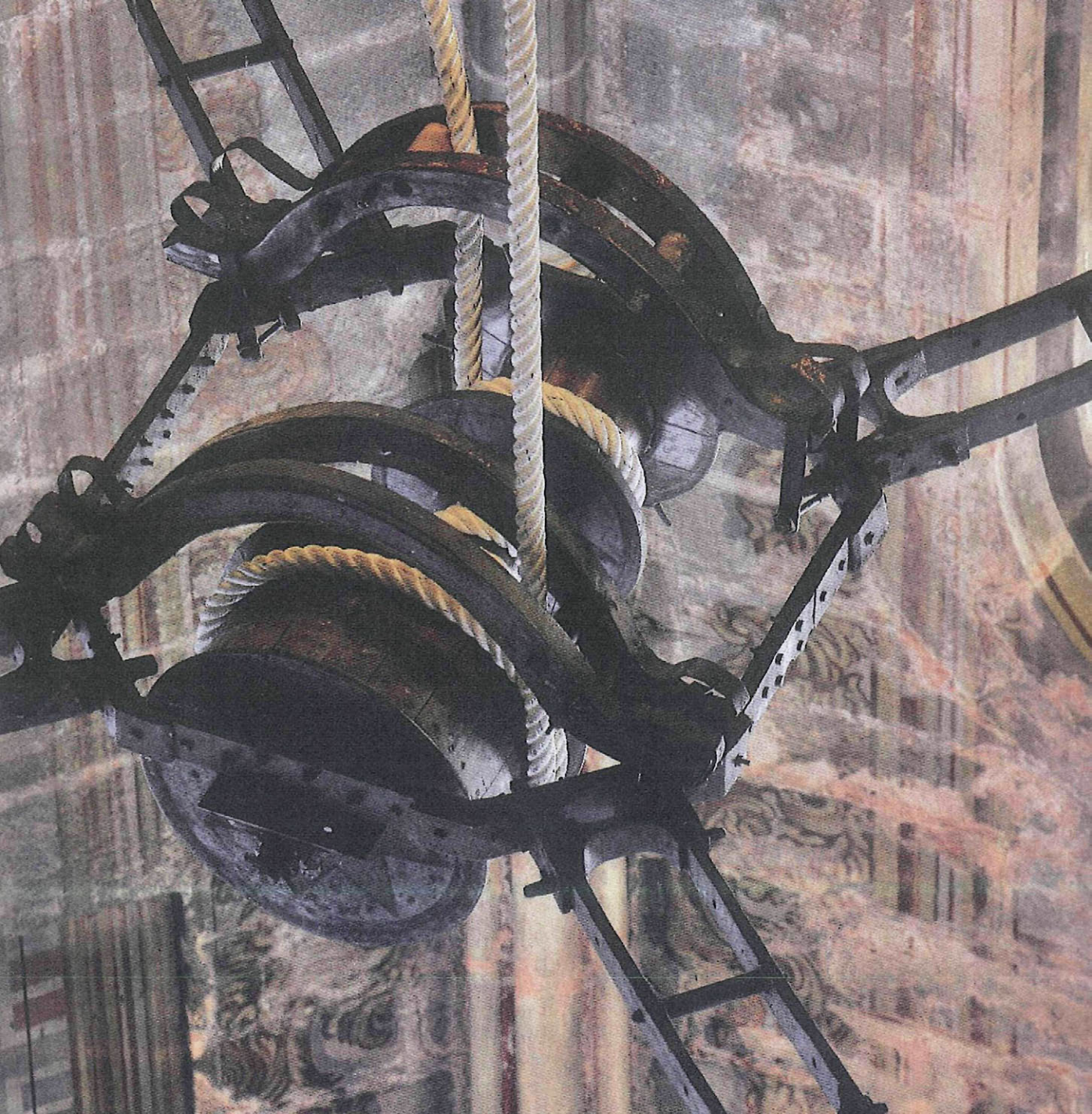
La estructura soporte actual, que data de 1602, es un marco de hierro atornillado a cuatro sustentáculos también de hierro, que descansan encastrados en los grandes pilares del crucero. El conjunto, que se reforzó recientemente con tirantes diagonales de seguridad para abortar un fallo incipiente en los encas-

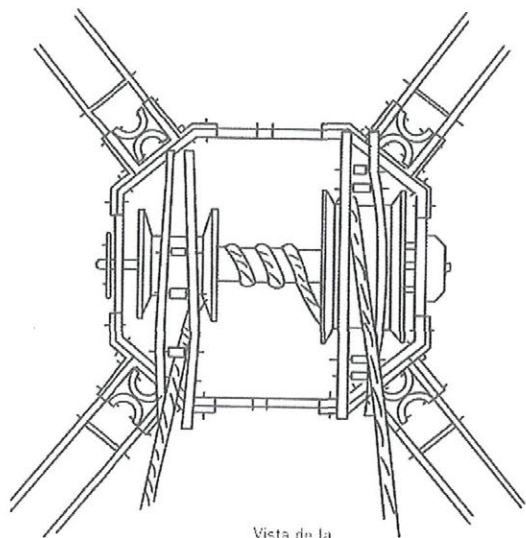
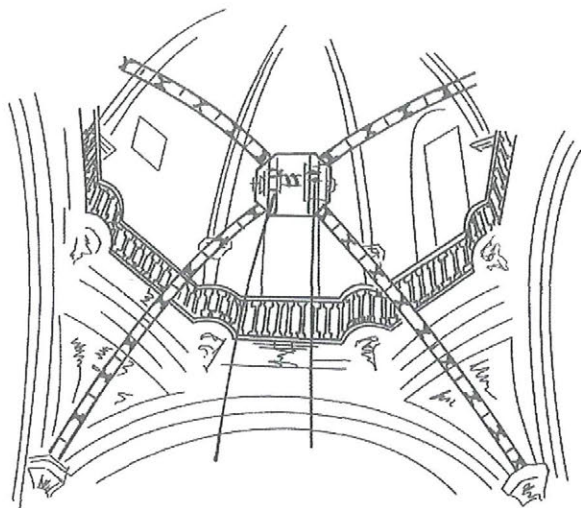
tres, trabaja como un arco. En aquel año, el cabildo de la catedral había decidido que la estructura primitiva, un sistema de vigas dispuestas a través de la torre del crucero, a la altura de las bóvedas, obstruía demasiado la luz que bajaba de vidrieras, y encargó la nueva estructura a una herrería de Vizcaya. Cuando se ha de reemplazar la cuerda del botafumeiro, se extiende una escalera de mano hasta el marco de hierro, desde una estrecha balconada que ciñe el interior del crucero, a la que se accede desde la techumbre por una vidriera.

Ese marco soporta dos tambores huecos de madera de castaño, de 29 y 58 centímetros de diámetro, que descansan en simples cojinetes de deslizamiento de bronce. El tambor grande está en el lado del botafumeiro, donde la tensión en la cuerda es así la mitad del valor en el lado de los tiradores; el sistema de tambores amplifica desplazamiento y reduce tensión, a la inversa de un tomo.

⁹ Walker, J., *The Flying Circus of Physics*, Wiley, New York, p. 38, 1975.

¹⁰ Sanmartín, J. R., "O Botafumeiro: Parametric pumping in the Middle Ages", *American Journal of Physics*, Vol. 52, pp. 937-945, 1984.

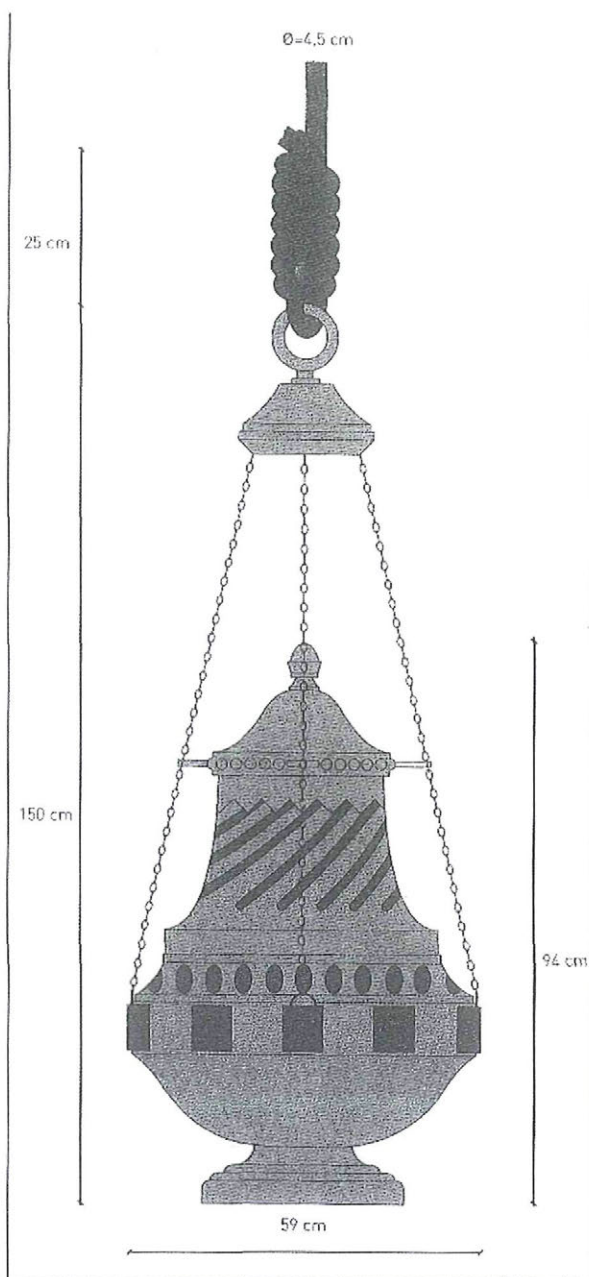




Vista de la
estructura soporte
del botafumeiro,
con tambores
y guías articuladas.







Cuando los *tiraboleiros* desplazan casi metro y medio de cuerda, los tambores giran más de vuelta y media, y enrollan $\Delta L=2,9$ metros en el tambor grande. Guías de madera cuelgan libremente del marco soporte, aparentemente para mantener plana la oscilación. Se podría hacer uso de dos cuerdas porque no hay deslizamiento en los tambores, pero es fácil pasar una de un tambor a otro por agujeros en el resalte de carrete en sus extremos. Las últimas cuerdas utilizadas fueron de yute, pero anteriormente se usaron de cáñamo.

El Incensario actual es de latón plateado y pesa 53 kilogramos. (Una anécdota refiere que en visita de Miguel de Unamuno en 1912, se le dijo que pesaba 80 y se habló de que alguien lo había levantado; Unamuno no pudo resistirse al reto y, subiéndose donde se exponía el Incensario, levantó sus 53 kilogramos.) Su centro de

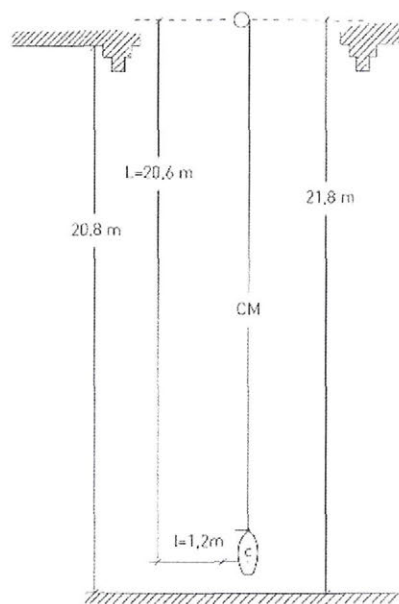
Dimensiones
del botafumeiro
de la catedral
compostelana.

masas está a 50 centímetros sobre la base. La cuerda utilizada de 1975 a 1985 tenía 4,5 centímetros de diámetro y pesaba 0,81 kilogramos por metro de longitud; unos 3 m de cuerda se anudan a un anillo del que cuelga por 4 cadenas el botafumeiro, en un grueso y pesado nudo que alcanza 25 centímetros por encima. El conjunto pesa unos 56,5 kilogramos y, en su posición más baja, su centro de masas está a $L=20,6$ metros por debajo del eje de tambores y a 1,2 metros por encima del suelo. De lo alto del nudo al eje hay 19,4 metros de cuerda, con un peso de 15,7 kilogramos³⁰.

El incensario reemplazado en 1851 era de hierro. Años después se sugirió que el de plata había sido requisado por tropas francesas durante la campaña de 1809 (Zepedano y Carnero, 1870). Esto produjo cierta confusión en autores posteriores, que no encontraron evidencia de ello en

archivos de la catedral, en catálogos de objetos sí requisados. La realidad es que hubo dos botafumeiros de plata, aquel citado en el Códice (*"cum magno turibulo argenteo"*), y otro regalado a la catedral por Luis XI de Francia cuando Delfín (López Ferreiro, 1909). Uno se destruyó en 1499 en una caída a considerar en la sección 6 de este estudio. Un posterior inventario, de 1529, todavía identifica uno de plata (López Ferreiro, 1909), y hay referencias a él a comienzos del siglo XVII (Baltasar Porreño, 1610; P. Ojea, 1615). Ese incensario se destruyó también en otro accidente, en 1622 (sección 6). No hay mención posterior alguna a uno de plata; por el contrario, registros de la catedral indican que uno de hierro era utilizado ya en 1729, cuando fue estañado. En 1812 y en 1846 fue reparado de abolladuras por un calderero.

Esquema de alturas en el transepto; CM es el centro de masas del botafumeiro, que dista 1,2 metros de lo alto del nudo.



Resonancia paramétrica

La variación relativa del radio pendular, $\Delta L/L=2,9/20,6$, es de un 14%. En una primera aproximación se podría considerar pequeña la ganancia en energía E por ciclo mediante el bombeo, $\Delta E > 0$, y calcularla, como también la pérdida de energía por resistencia del aire, $\Delta E < 0$, independientemente una de otra. Los *tiraboleiros* acortan la cuerda al pasar el botafumeiro por la vertical y alargan en lo alto de la oscilación. Esto se corresponde con que al acortarla se realiza trabajo mecánico sobre la tensión en la cuerda, y esa tensión es mayor en el punto más bajo, donde se opone tanto al peso como a la fuerza centrífuga. Se encuentra que el cociente entre ganancia de energía en un ciclo y la energía E al iniciarlo ($\Delta E/E$) es 3 veces el cociente $\Delta L/L$. La ganancia misma, ΔE , es proporcional al producto del peso del botafumeiro y la longitud ΔL , y crece con la amplitud; ΔE crece como el cuadrado de la amplitud para amplitudes pequeñas.

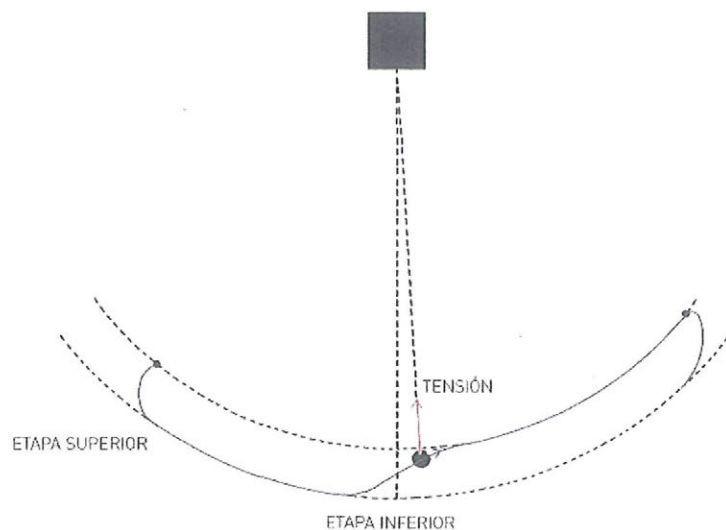
El período de un péndulo es proporcional, como se señaló, a la raíz cuadrada $\sqrt{L/g}$. Para un radio pendular de 20,6 metros el período es de 9,1 y 10,5 segundos a 13 y 82 grados, respectivamente; un ciclo genérico dura así en torno a 5 segundos. Por otra parte, la aceleración característica en las dos etapas del ciclo es la aceleración de la gravedad misma, g , y cada una dura del orden de $\sqrt{\Delta L/g}$; se puede estimar en 0,75 segundos la duración de la etapa del paso por la vertical, y en 0,77 segundos la duración de la otra etapa. El bombeo del botafumeiro es así óptimo y razonablemente instantáneo.

El bombeo de un columpio es mucho menos eficiente que el del botafumeiro en dos aspectos. Típicamente un columpio es unas 10 veces más corto; para un radio pendular del orden de 2 metros el ciclo dura alrededor de 1,5 segundos, lo que hace difícil acomodar correctamente las dos etapas de bombeo. A esto se añade que el cociente $\Delta L/L$

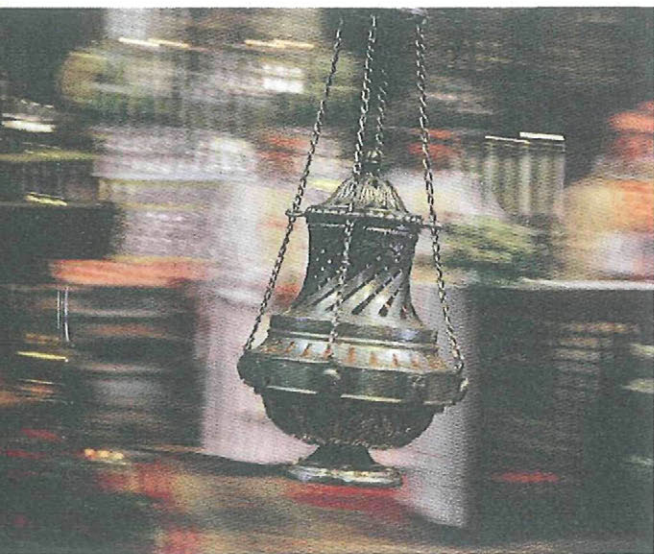
está lejos de ser pequeño, lo que ciertamente no ayuda a la realización de etapas casi instantáneas.

Contrariamente, asimismo, al caso del columpio, la fuerza de frenado o resistencia del aire al movimiento del incensario tiene un efecto considerable. La resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad, la cual alcanza un valor próximo a $\sqrt{2gL}$, unos 19 metros por segundo aproximadamente. En un Túnel de Viento del Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial se midió la resistencia sobre un modelo comercial del incensario a escala 1:4,5 en media, a velocidades de viento a escala inversa 4,5:1 de aquellas que se dan en el movimiento del botafumeiro¹¹. Esto hace que tanto el número de Reynolds, que es proporcional al producto de velocidad por tamaño característico y mide importantes efectos de viscosidad en la corriente de aire, como la fuerza misma, sean iguales para botafumeiro y modelo. No hay apreciables

11 Feo, A., Coeficientes aerodinámicos de un cuerpo a distintos Números de Reynolds / Informe Núm. I-234 / 510 / 82-104, INTA, diciembre de 1982.



Esquema del ciclo de bombeo óptimo, entre radio pendular máximo (L) y mínimo $(L-\Delta L)$. Se requieren unos 80 segundos y 17 grados para alcanzar una amplitud máxima de 82 grados, a medio metro de la bóveda. El botafumeiro traza un arco de 65 m y pasa a 68 km/h a ras del suelo.





efectos de compresibilidad del aire porque el máximo número de Mach (cociente de velocidad a velocidad del sonido), que se da en la corriente del modelo, no pasa de 0,25; tales efectos sí invalidarían resultados obtenidos utilizando un modelo dos veces menor.

Para la resistencia del aire a la cuerda se pueden utilizar resultados bien conocidos para un cilindro genérico. De los valores para las resistencias a incensario y cuerda se encuentra que el cociente entre pérdida de energía en un ciclo y la energía E al iniciarlo ($\Delta E/E$) es proporcional al cociente entre peso del aire barrido por cuerda e Incensario y peso de éste. A la pérdida misma, ΔE , contribuyen términos proporcionales, respectivamente, a los productos $L^3 \times$ diámetro de la cuerda y $L^2 \times$ cuadrado del tamaño característico del Incensario, que crecen con la amplitud; $|\Delta E|$ crece como el cubo de la amplitud a valores pequeños de ésta. El cociente $|\Delta E|/\Delta E+$ es despreciable a baja amplitud pero alcanza la unidad a unos 82 grados. La ganancia $\Delta E+$ es ella misma pequeña a baja amplitud por lo que iniciar el bombeo en un

El enérgico bombeo del incensario supone el esfuerzo de varios operarios, por lo que se trata de una tarea de equipo.

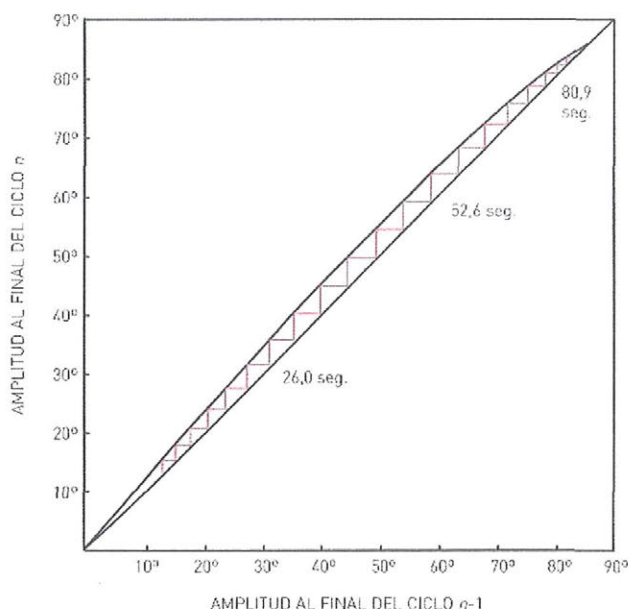
valor claramente inferior al usual de 13 grados resulta en un aumento substancial del número de ciclos necesarios para alcanzar la bóveda; esto fue verificado recientemente por el equipo de *tiraboleiros*.

El resultado para la ganancia neta ΔE en un ciclo genérico permite calcular la energía al final de un ciclo en función de la energía a su comienzo. Se tiene así una correspondencia (map) entre las amplitudes de ciclos sucesivos. Para obtener acuerdo con las observaciones al 2-4%, hubo de añadirse a los cálculos anteriores correcciones de segundo orden en el bombeo y la resistencia, y el efecto de bombeo, y frenado por resistencia, simultáneos. Se consideraron asimismo los efectos de peso de la cuerda y, en cierto modo, de péndulo compuesto; efectos de péndulo doble, debidos a una variable orientación relativa de cuerda e Incensario, son inapreciables¹⁹.

La figura adjunta muestra el 'mapa' resultante, cuyos ejes coordenados corresponden a las amplitudes al final de dos ciclos consecutivos; si se conoce la amplitud inicial, el mapa genera toda la sucesión iterativamente²⁰.

Tomando el típico valor inicial de 13 grados en el eje horizontal, se sube verticalmente hasta la curva función. De allí se mueve horizontalmente hasta la diagonal, de donde se sube de nuevo a la curva, y así suce-

sivamente. De la extrema proximidad entre curva y diagonal a bajas amplitudes se sigue aquel rápido incremento en el número de ciclos necesarios para alcanzar la bóveda si se reduce la amplitud inicial.



Relación de amplitudes al final de dos ciclos genéricos consecutivos; se indican los tiempos al final de los ciclos 6, 12 y 18.

¹⁹ Sanmartín, J. R., "Física del Botafumeiro", en *Orden y Caos*, ed. Fernández-Rañada, A., Prensa Científica, Barcelona, 1990; "La Physique de l'Incensoir", *Pour la Science*, n.º 155, septiembre de 1990, pp. 96-104.

||| La particular singularidad del botafumeiro

En la invención del botafumeiro parecería intervenir lo que en ciencia se llama a veces *serendipity* (de una historia de Horace Walpole sobre príncipes de Serendip, el antiguo nombre de Ceilán): la capacidad para realizar descubrimientos, de interés, enteramente por accidente. Recientemente, el equipo de *tiraboleiros* intentó bombear hasta la bóveda el ligero ornamento ("la alcachofa") que cuelga regularmente en el transepto. No fue posible. La explicación de esta paradoja descansa en como ganancia y pérdida de energía, en un ciclo, difieren en su dependencia del peso. En la simple aproximación de primer orden, la ganancia es proporcional al peso que se va a bombear por lo que, a menor peso, es menor en igual medida. Por el contrario, la resistencia del aire es débilmente dependiente del peso, y es enteramente independiente en el particular caso de la cuerda. Sin duda, en sus orígenes, el equipo de *tiraboleiros* probó, directamente, a bombear el incensario, lo cual fue, simplemente, un hecho afortunado, un accidente.

De haber primeramente probado (y haber fallado) con alguna lámpara ligera, lo que parecería razonable, quizá hubieran abandonado posteriores ensayos. Los *tiraboleiros* de entonces no hubieran podido entender la paradoja de que el bombeo, ineficaz para un objeto ligero, pudiera ser eficaz para el (más pesado) *botafumeiro*.

Aunque la invención del rito sería fruto tanto de la intuición, tal como se discutió en la sección 2 de este estudio, como de la fortuna, el *know-how* resultante tuvo/tiene un alcance limitado. Cuando cesa el bombeo, la amplitud de la oscilación decrece por efecto de la resistencia del aire. Como ésta es extremadamente pequeña a bajas amplitudes (recuérdese la proporcionalidad entre $|\Delta E|$ y el cubo de la amplitud), el proceso se hace finalmente muy lento, de modo que, de hecho, el sacristán concluye por detener violentamente el incensario. Interesa observar aquí que invirtiendo el ciclo de bombeo (alargando la cuerda al paso por la vertical, acortándola en el punto más alto) se

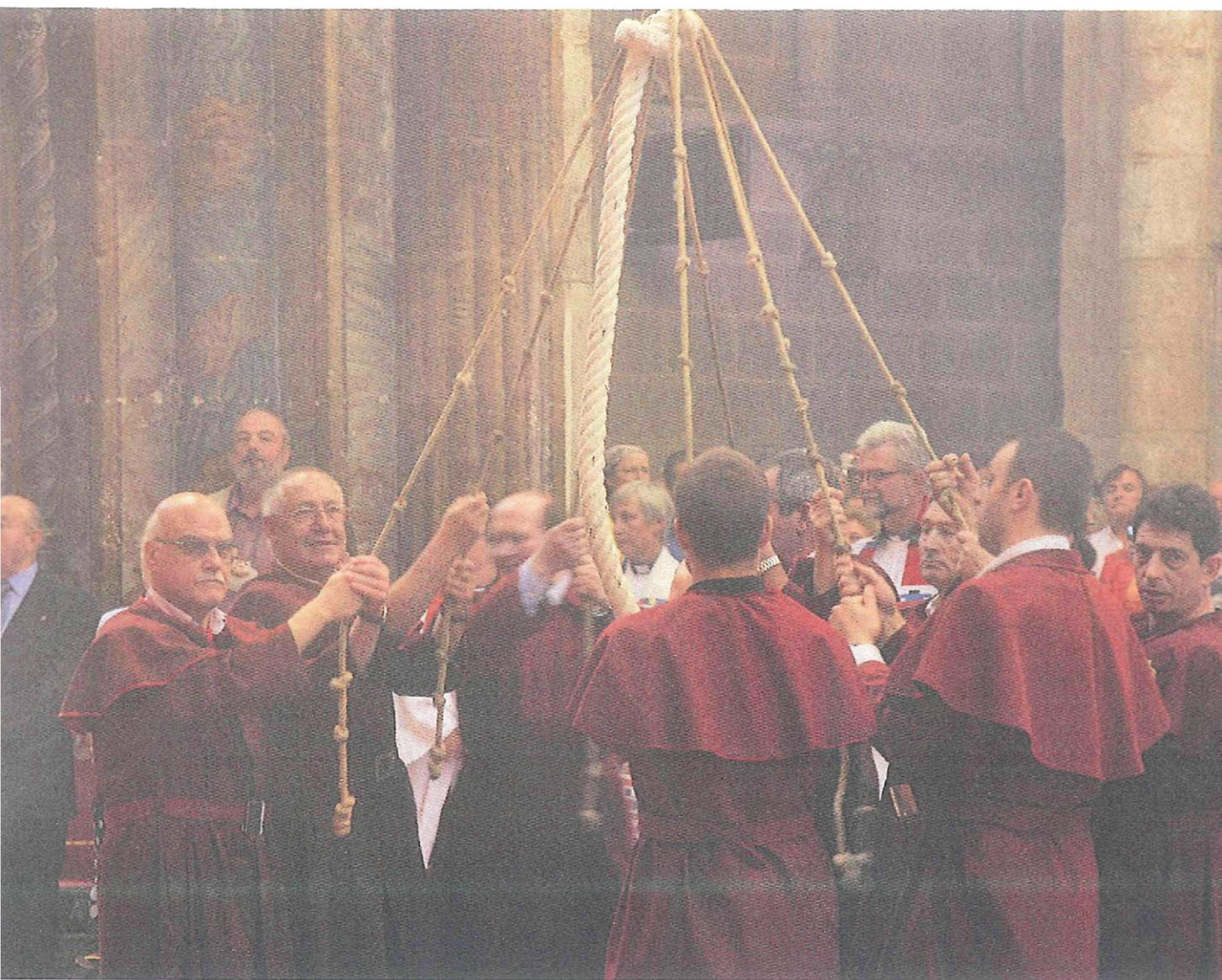
podría frenar el botafumeiro más rápidamente; en el análisis de primer orden ya considerado, esto supone cambiar un signo, escribir $-\Delta E+$ donde figuraba $\Delta E+$ ¹⁰.

Como sería esperable de un mundo medieval de tornos y árganos, el *know-how* fue mucho más eficaz en lo que atañe a mecanismos. Se puede suponer que cuando el procedimiento de bombeo fue descubierto se utilizó un solo tambor para enrollar la cuerda. El valor de ΔL sería entonces unos 1,5 metros, el máximo que permite un bombeo razonablemente cómodo. Para ese valor, la máxima amplitud alcanzable es de unos 55 grados. Probablemente se intuyó muy pronto la necesidad de incrementar ΔL , lo que condujo a la introducción de un segundo tambor. En la nota de comienzos del siglo XIV, en el Códice, ya se conseguía bombear el Incensario hasta la bóveda.

Como descubrieron Galilei y Huygens, las oscilaciones de baja amplitud son isócronas; su frecuencia ω , como su período, es independiente de la amplitud. La regla de operación

Para llegar
a la máxima altura
hacen falta
17 recorridos
completos
y aproximadamente
80 segundos
de esfuerzo
por parte de los
trabateiros.





Los *tiraboteiros* acortan la cuerda al pasar el botafumeiro por la vertical y la alargan en lo alto de la oscilación.

del botafumeiro descubierta en el siglo XIII tiene en tal caso un muy especial significado: toda modulación del radio pendular, en secuencia de bombeo repetida cíclicamente cada semiperíodo del movimiento del péndulo, será una función periódica de frecuencia doble, 2ω . Por otra parte, una técnica matemática, el análisis de Fourier, permite escribir una tal función periódica de frecuencia 2ω como suma de funciones seno de frecuencias 2ω , 4ω , 6ω , etc., por coeficientes de Fourier apropiados. Finalmente, si la modulación es débil, el análisis de Émile Mathieu¹³ muestra que sólo el primer término contribuye a un incremento en la amplitud de oscilación. La secuencia óptima de bombeo correspondería entonces a aquella modulación de variación radial entre $L - \Delta L$ y L , que presente el mayor primer coeficiente de Fourier. La solución a este problema es la función que salta discontinuamente (instantáneamente) entre esos valores, lo cual corresponde al ciclo óptimo; su

primer coeficiente es $4/\pi$ el valor del salto. Nótese que la simple función seno tiene, naturalmente, un primer —y único— coeficiente de Fourier de valor unidad; la ganancia en amplitud de oscilación es sólo $\pi/4$ veces la ganancia óptima...¹⁴.

La peregrinación a Santiago no decayó hasta el siglo XVI, con la ruptura de la Cristiandad. ¿Por qué el rito del botafumeiro no tuvo mayor difusión? La respuesta estaría en el cambio en la arquitectura de las catedrales. El rito apareció cuando ya se había impuesto el estilo de catedral gótica; Notre Dame de París data de mediados del siglo XII. Las bóvedas de catedrales góticas son típicamente dos veces más altas (sólo catedrales góticas menores, como Ourense y Tui, presentan alturas comparables a la románica de Santiago). La dificultad en correr un incensario de doble radio pendular hubiera aparecido insuperable. Aún en caso de haberse comprendido entonces, el necesario escalado de magnitudes característi-

cas al pasar de unos 20 metros de radio pendular a 40 metros, hubiera resultado irrealizable en la práctica. El aumento en pérdidas por resistencia del aire llevaría a aumentos sustanciales en peso del incensario, y en grosor y en variación de longitud ΔL de la cuerda, e implicaría una estructura soporte muy pesada, multitud de tiradores, y mecanismos muy complejos. En sentido figurado, se podría hablar de analogía con el dudoso *weak anthropic principle* que aparece en discusiones cosmológicas desde hace un tercio de siglo: el rito del incensario sólo podría haberse dado y observado en una catedral románica como la de Santiago de Compostela.

La singularidad histórica de la física del botafumeiro, como se analizó en las notas 10 y 12, ha originado una variada literatura posterior, con énfasis en la periodicidad del fenómeno¹⁵, la matemática no lineal de su comportamiento¹⁶, o su carácter de péndulo de dinámica compleja¹⁷.

13 Bergé, P., Pomeau, Y. y Dubois-Gance, M., *Des Rhythmes au Chaos*, Caps. 6 y 7, Éditions Odile Jacob, Paris, 1994.

14 Richards, D., *Advanced mathematical methods with Maple*, Cambridge University Press, Cambridge / UK, 2002, pp. 446-447.

15 Baker, G. L. y Blackburn, J. A., *The pendulum: a case study in physics*, Cap. 3, Oxford University Press, Oxford, 2005.



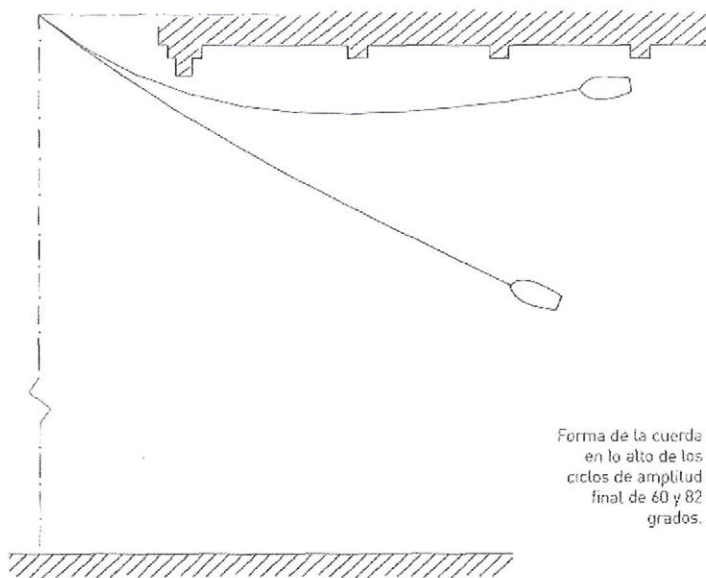
Cuando cesa el bombeo,
la amplitud de la oscilación
decrece por efecto
de la resistencia del aire.



|||| Accidentes y caos

No debiera sorprender que las ocasiones más propicias para una caída del botafumeiro correspondan a las dos etapas del ciclo de bombeo, al paso por los puntos más alto y más bajo de una oscilación; en el primer caso, en los ciclos iniciales de baja amplitud, en el segundo caso en los ciclos finales de gran amplitud. Sorprendente es, sin embargo, que hay exactamente dos caídas históricamente registradas, una para cada etapa.

Un accidente del primer tipo ocurrió el 23 de mayo de 1622. Según nota de última página en copia de 1587 de un códice del siglo XII, la *Historia Compostelana*, durante una procesión en la catedral "quebró la cuerda, y cayó a plomo..." el incensario, "cayendo a los pies de los tiradores, que están siempre perpendicularmente debajo de la rueda...". Naturalmente, la cuerda es sometida a un fuerte tirón al detener el libre descenso del botafumeiro que sigue a la acción de los *tiraboleiros* en el punto más alto de una oscilación; esa extrema tensión en la cuerda es mayor a bajas amplitudes, cuando la

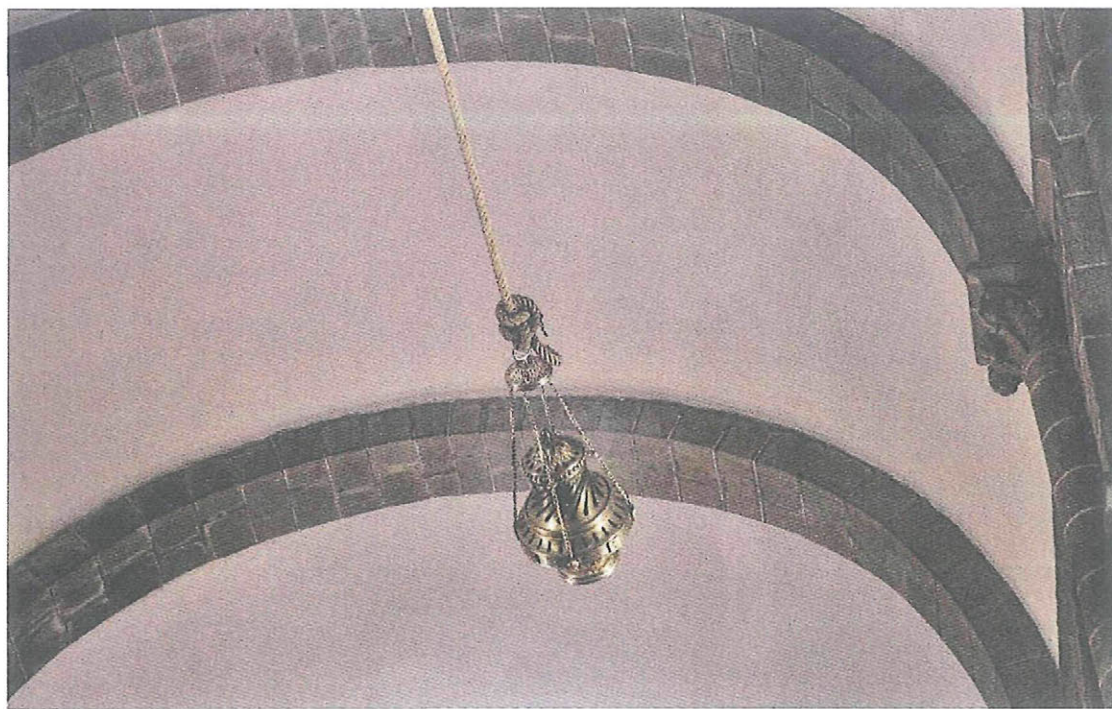


Forma de la cuerda en lo alto de los ciclos de amplitud final de 60 y 82 grados.

oscilación es casi horizontal. La caída es entonces vertical y ocurre en el transepto mismo.

El segundo accidente ocurrió el 25 de julio de 1499. Según nota en un *Memorial de la Biblioteca Colombina de Sevilla*, "yéndose acasar la infanta D^a Catalina con el Príncipe de Gales...", asistió a la misa, de paso "a embarcarse a la Coruña...". Al incensario se le "quebraron las cadenas en

que andaba colgado..." y salió "por la puerta de la Iglesia, donde se hizo pedazos". La puerta, que dista del centro del transepto unos 33 metros, sólo puede alcanzarse si el incensario queda libre durante una oscilación de gran amplitud, a un ángulo de cuerda y vertical de unos 40 grados. La tensión de la cuerda, en ausencia de bombeo, es máxima en el paso por la vertical, y aumenta con el bom-



El botafumeiro es un péndulo de dinámica compleja.

beo, pero resulta allí de valor limitado. El incensario puede quedar libre más allá de la vertical en el caso de rotura de cadenas, de las que sólo 3 trabajarían a un tiempo.

Accidentes ligeros atañen a la cuerda. Cálculos para la cuerda de 4,5 centímetros de diámetro utilizada entre 1975 y 1985, que sustituyó a una de 4 centímetros, muestran que el

propio peso de la cuerda la hacía evitar el arco del crucero. En 1985 fue reemplazada por otra de 4,7 centímetros de diámetro. Esta evolución hacia un mayor grosor parece haber sido continua. Una foto de comienzos del siglo XX muestra una cuerda de unos 3,2 centímetros, la cual tocaría mínimamente el arco a máxima amplitud. Un asiento en Libro de Fá-

brica de 1673 sugiere un diámetro, de una nueva cuerda, todavía menor. Con una cuerda tal, aparte de un mayor peligro de rotura, el botafumeiro podría llegar a la bóveda. De hecho, una nota de 1610 de Baltasar Porreño describe como el incensario llegaba a "dar golpes en las bóvedas más altas, y derramar por la Yglesia las brasas, antigua costumbre de esta Yglesia".

Más tarde, en ese mismo siglo XVII, Christiaan Huygens demostró que el isocronismo tan sólo es válido para pequeñas amplitudes (para las que introdujo un factor de reducción $\pi/4$ en el período, corrigiendo una aproximación de Galilei). De una amplitud próxima a cero grados a la amplitud a 90 grados, el período aumenta en un 18% aproximadamente. Por otra parte, rozamientos disipan energía, lo que finalmente conduce siempre a la parada del péndulo. Pero la introducción de un mecanismo de escape (de áncora), que controla el descenso de una pesa en tic-tacs discretos, permitió introducir energía a la oscilación de modo regular, y así, tanto mantener constante su amplitud como 'contar' unidades de tiempo. A Huygens se debe el primer reloj 'moderno', que supuso una revolución tecnológica.

Una oscilación de péndulo completa exige pasar dos veces por la vertical.







Se sabe de dos veces en el pasado siglo en las que se desvió el botafumeiro de su plano normal de oscilación a lo largo de los brazos del crucero: en 1926 golpeó un pilar del transepto y en 1937 golpeó una valla lateral que separaba el Altar del Coro. Esta desviación introduce una novedad fundamental. El péndulo bombeado o forzado óptimamente en oscilación plana no puede ser caótico, porque el radio pendular y su modulación están predeterminados, en principio, en términos de posición y velocidad angulares; el sistema es 2D en el sentido de la sección 1. En los análisis mencionados en esa Sección, el péndulo era forzado o bombeado con una ley de frecuencia prefijada; como la frecuencia de la oscilación varía con la amplitud, radio pendular y su modulación no quedan predeterminados por lo que los sistemas eran 3D o 4D y podrían exhibir caos.

Pero si su oscilación deja de ser plana, el sistema del botafumeiro pasa él mismo a ser al menos 3D, aún bajo bombeo óptimo, por lo que permite, en principio, la existencia de caos. En 1993 se encontró movimiento caótico en el caso simple de

un péndulo esférico, forzado como un columpio, según regla próxima a la óptima⁶. Es claro que movimientos erráticos del incensario harían difícil una acción de bombeo eficaz; el incensario estaría propenso a accidentes graves; el movimiento mismo aparecería inapropiado para un servicio litúrgico. Las dos guías que cuelgan del marco de los tambores por articulaciones para evitar rozamiento ayudan, sin duda, a que la oscilación del botafumeiro se mantenga sensiblemente plana. Esto sugiere una pregunta que carece todavía de respuesta: ¿se introdujeron en algún momento del pasado esas guías tras observar oscilaciones no planas erráticas?

Izquierda:
cuando cesa el bombeo,
la resistencia al aire
hace que el proceso se vuelva
muy lento y el sacristán concluye
por parar violentamente
el botafumeiro.

Página siguiente:
el rito del botafumeiro
sólo podría haberse dado y observado
en una catedral románica
como la de Santiago de Compostela.

⁶ Sanmartín, J. R., López-Rebollar, O. y De Paola, N., "Non-periodic driving of coupled oscillators: a spherical swing", *Physica D*, Vol. 69, pp. 148-152, 1993.

